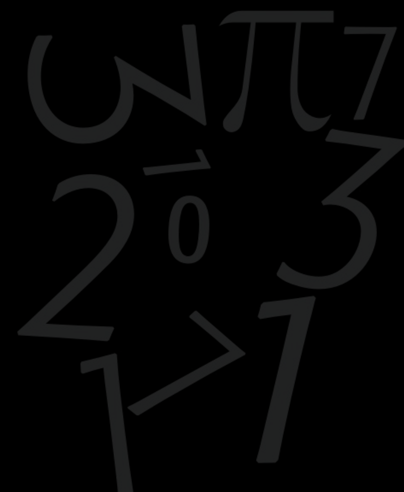
Doubt Yourself

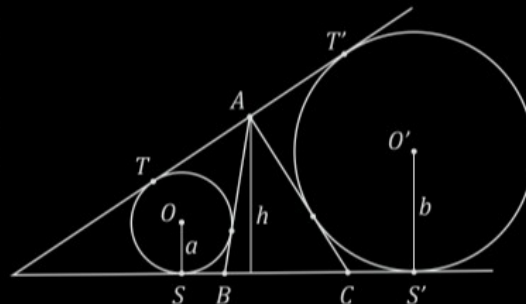
Olimpíada Brasileira de Matemática Das Escolas Públicas 2021 – 2º Fase – Nível 3

André Pinheiro

Novembro de 2022



5. Na figura, as circunferências de raios a e b, centradas em O e O', são tangentes aos lados do ângulo em S e T e em S' e T', respectivamente. Elas também tangenciam os lados AB e AC de um triângulo ABC, em que A pertence a TT' e BC está contido em SS'. Esse triângulo ABC tem altura h relativa à base BC.



a) Calcule o perímetro do triângulo ABC quando $SS' = 10$.

CR CN

b) Denote as áreas dos triângulos ABC, ABO e ACO' por A_1, A_2 e A_3, respectivamente. Explique por que a área do hexágono $OSS'O'T'T$ é dada por $A_1 + 2A_2 + 2A_3$.

CR CN

c) Mostre que a área do triângulo ABC é $A_1 = \frac{1}{2}[(b-a)\cdot AB + (a-b)\cdot AC + (a+b)\cdot BC]$.

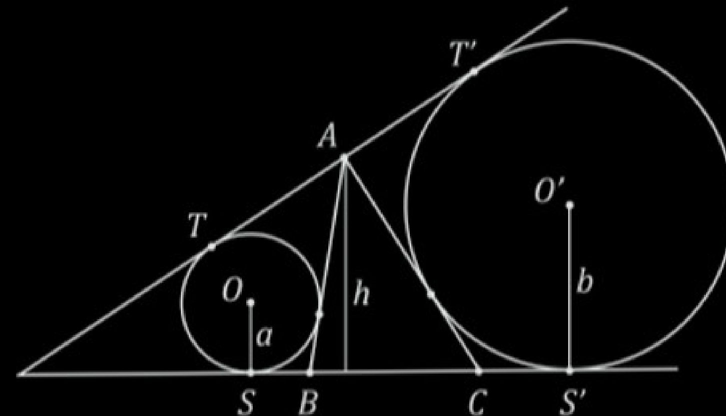
CR CN

d) Mostre que, se $AB = AC$, então $h = a + b$.



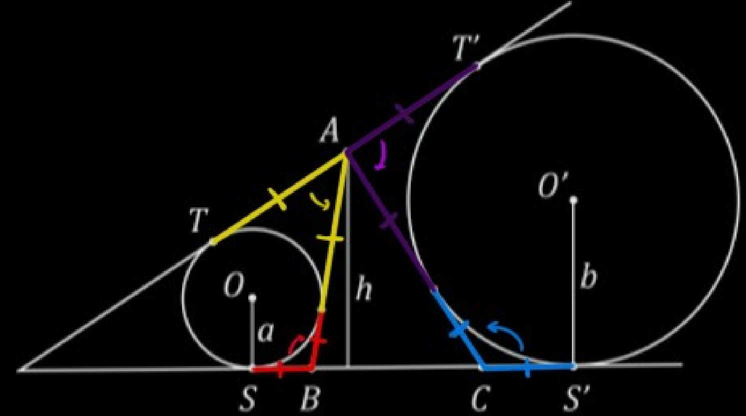
Solução

a) Calcule o perímetro do triângulo ABC quando SS' = 10



Solução

a) Calcule o perímetro do triângulo ABC quando $\overline{SS'} = 10$



1. Através do teorema dos segmentos tangentes, podemos concluir que $\overline{AB} = SB + TA$, $AC = AT' + CS'$ e $SS' = TT'$.

2. O perímetro da circunferência ABC é dado por
$AB + BC + AC$.

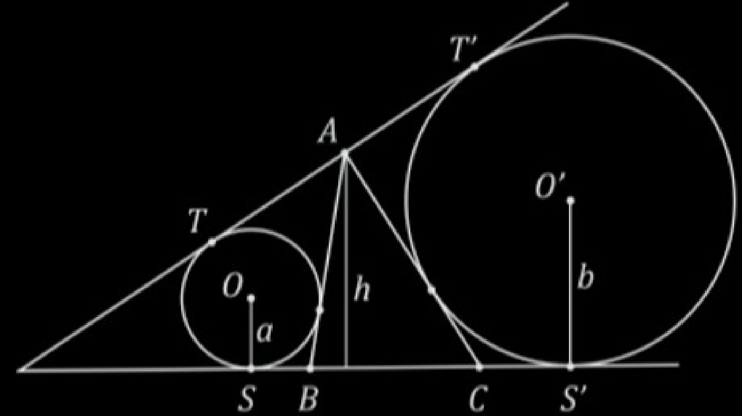
3. Com (1) e (2), temos que o perímetro pode ser escrito da seguinte maneira:

$$SB + TA + BC + AT' + CS' =$$
$$= SB + BC + CS' + TA + AT'$$
$$= SS' + TT' = 2SS'$$

4. Tendo em conta que SS' é 10, o perímetro é 2*10 = 20 □

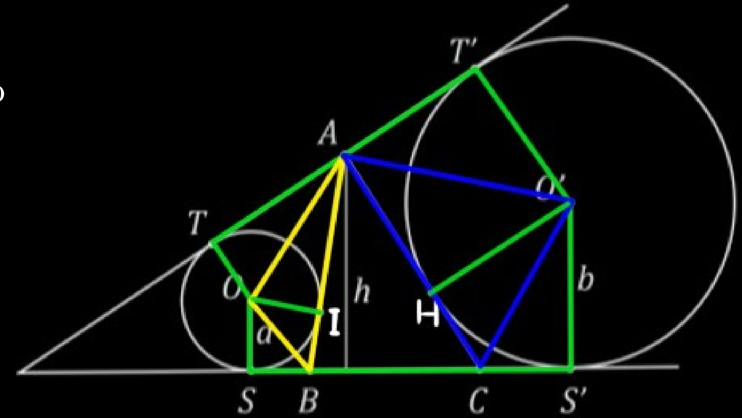
Solução

b) Denote as áreas dos triângulos ABC, ABO e ACO'
por A_1, A_2 e A_3 , respetivamente. Explique por que a área do
hexágono OSS'O'T'T é dada por A_1, + $2A_2$ e $2A_3$.



Solução

b) Denote as áreas dos triângulos ABC, ABO e ACO'
por A_1, A_2 e A_3 , respetivamente. Explique por que a área do hexágono OSS'O'T'T é dada por A_1, + $2A_2$ e $2A_3$.



1. Seja I e H o ponto de interceção da circunferência de centro O e O', respectivamente.

2. Através do teorema dos segmentos tangentes, podemos concluir que a Área[OTAI] = 2*Área[OAI] e Área[OSBI] = 2*Área[OBI].

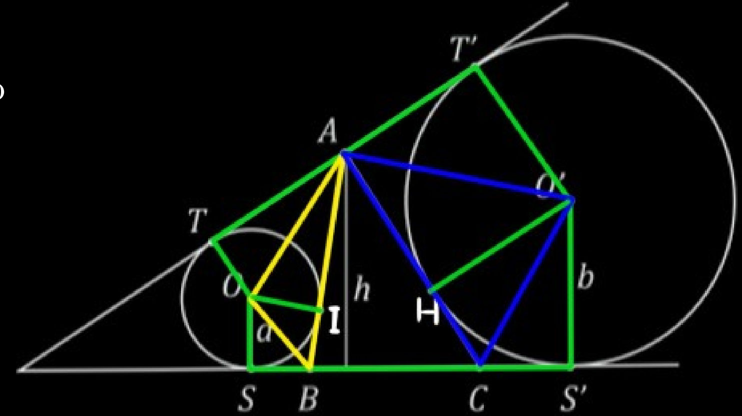
3. Como A_2 = Área[ABO] = Área[OAI] + Área[OBI], temos que Área[TOSBA] = Área[OTAI] + Área[OSBI] =
= 2(Área[OAI] + Área[OBI]) = $2A_2$

4. Analogamente para o pentágono AT'O'S'C, temos também que Área[AT'O'S'C] = $2A_3$

Solução

b) Denote as áreas dos triângulos ABC, ABO e ACO'
por A_1, A_2 e A_3 , respetivamente. Explique por que a área do hexágono OSS'O'T'T é dada por A_1, + $2A_2$ + $2A_3$.

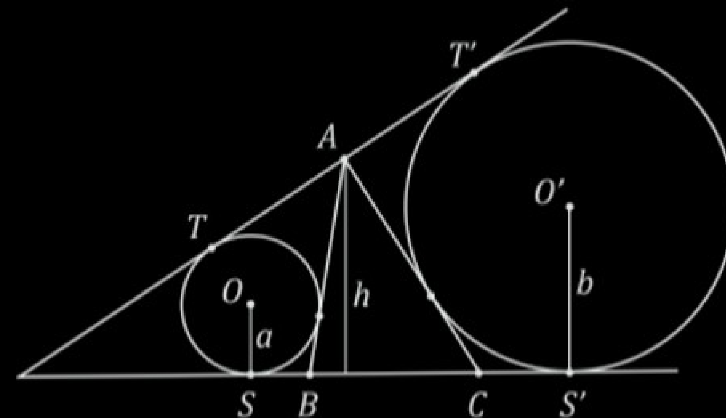
5. Como Área[OSS'O'T'T] =
= Área[ABC] + Área[TOSBA] + Área[AT'O'S'C], podemos concluir então que Área[OSS'O'T'T] = A_1, + $2A_2$ e $2A_3$, tal como queríamos mostrar. □



Solução

c) Mostre que a área do triângulo ABC é

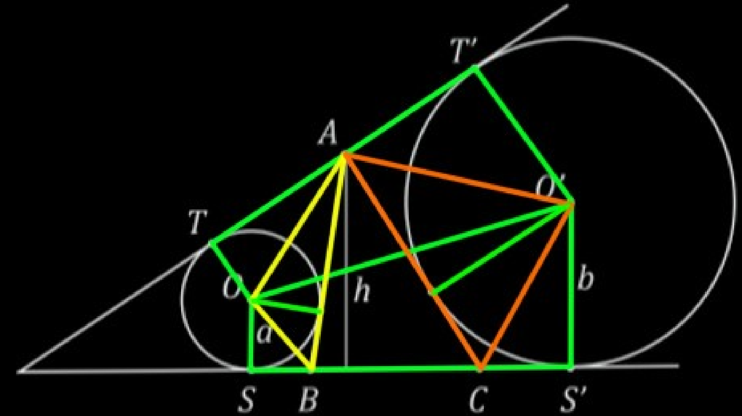
$$A_1 = \frac{1}{2}\left[(b-a)\,AB + (a-b)\,AC + (a+b)\,BC\right]$$



Solução

c) Mostre que a área do triângulo ABC é

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[(b-a)\,AB + (a-b)\,AC + (a+b)\,BC\right]$$



1. Reparemos que
A_1 = 2Área[OSS'O'] - (Área[TOSBA] + Área[AT'O'S'C])

2. Como já tínhamos deduzido na alínea (b),
Área[TOSBA] = $2A_2$ e Área[AT'O'S'C] = $2A_3$.

3. Como a é a altura do triângulo OAB relativamente a AB, temos então que
A_2 = a*AB/2 e de forma análoga com o triângulo AO'C, temos A_3 = b*AC/2

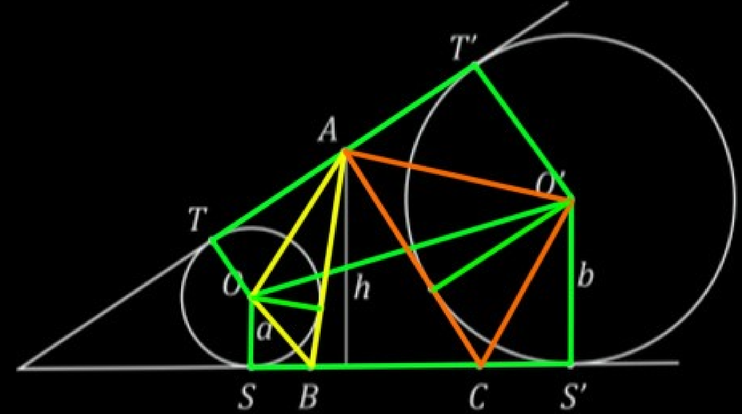
4. Além disso, OSS'O' é um trapézio e portanto a
Área[OSS'O'] = (a + b)*SS'/2

5. Na alínea (a) deduzimos também que SS' = (AB + AC + BC)/2

Solução

c) Mostre que a área do triângulo ABC é

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[(b-a)\,AB + (a-b)\,AC + (a+b)\,BC\right]$$



6. Com 1, 2 e 3, temos

$A_1 = 2\text{Área}[OSS'O'] - 2A_2 - 2A_3$

$= 2\text{Área}[OSS'O'] - a*AB - b*AC$

7. Com 4 e 5, temos

$\text{Área}[OSS'O'] = (a + b)(AB + AC + BC)/4$

8. Com 6 e 7, temos

$A_1 = (a + b)(AB + AC + BC)/2 - a*AB - b*AC$

$= (a*AB + a*AC + a*BC + b*AB + b*AC + b*BC)/2 - a*AB - b*AC$

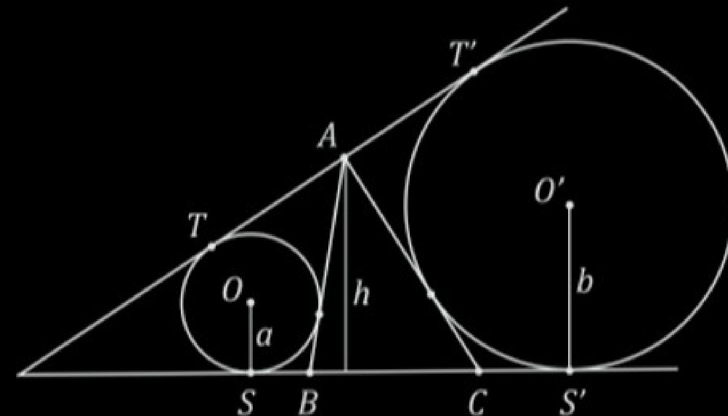
$= (a*AB + a*AC + a*BC + b*AB + b*AC + b*BC - 2a*AB - 2b*AC)/2$

$= (-a*AB + a*AC + a*BC + b*AB - b*AC + b*BC)/2$

$= [(b - a)AB + (a - b)AC + (a + b)BC\ ]/2$, tal como queríamos mostrar □

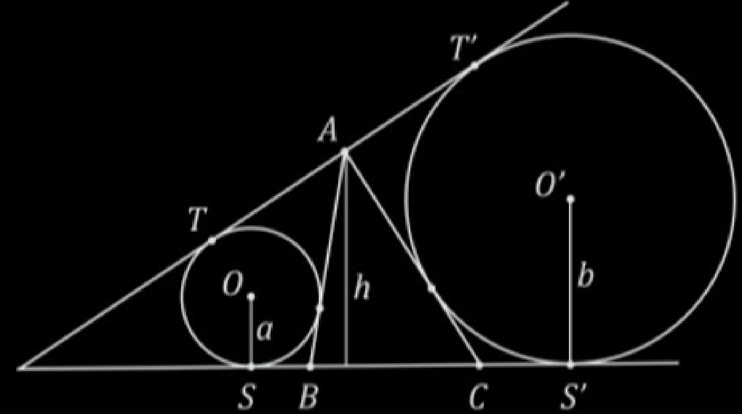
Solução

d) Mostre que, se AB = AC, então h = a + b



Solução

d) Mostre que, se AB = AC, então h = a + b



1. Com a expressão da área de A_1 e tendo em conta que AB = AC, podemos fazer as seguintes manipulações algébricas:

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[(b-a)\,AB + (a-b)\,AC + (a+b)\,BC\right]$$

= [(b – a)AB + (a – b)AB + (a + b)BC]/2
= [b*AB – a*AB + a*AB – b*AB + (a + b)BC]/2
= (a + b)BC/2

2. Como a área do triângulo é dada pela base vezes altura a dividir por dois e que BC é a base de ABC e h é a altura, temos:
A_1 = h*BC/2

3. Igualando as expressões de 1 e 2, temo:
(a + b)BC/2 = h*BC/2 ⇔ a + b = h e assim está mostrado. □

Solução

Resolução feita pelos organizadores da OBMEP

https://drive.google.com/file/d/1NR6G9LG9tlGOvM14v6uzpo8WYBM3F5md/view

